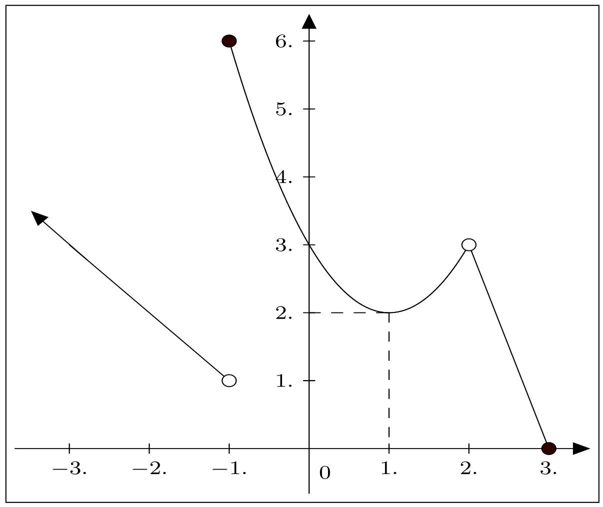
1) **[20 ptos.]**

A continuación se entregan dos funciones:

- La función $y = f(x)$, definida por la fórmula $f(x) = \log_2(x+1)$
- La función $y = g(x)$, dada por el siguiente gráfico



En base a las 2 funciones entregadas, determinar:

a) $Dom(f+g)$, y $Dom\left(\frac{f}{g}\right)$.

b) $Rec(f)$ y $Rec(g)$.

c) $(f\circ g)(0)$, $(g\circ g)(0)$, $(g\circ f)(-\frac{1}{2})$.

d) Para la función g, encuentre TODAS las pre imágenes de 3 y 0.

e) ¿Es f biyectiva?, en caso de serlo, determine su inversa.

Desarrollo

a) Para que la función $\log_2(x+1)$ este definida, basta que $x+1>0$, por lo tanto $Dom(f) =]-1,\infty[$. Luego si analizamos la gráfica de la función $g(x)$, nos damos cuenta que para los x dónde tenemos gráfica corresponden al dominio, por lo que $Dom(g) =]-\infty,3]-\{2\}$.
Ahora bien $Dom(f+g) = Dom(f)\cap Dom(g) =]-1,3]-\{2\}$. 2 pts.
Para $Dom\left(\dfrac{f}{g}\right)$, debemos sacar también todos los puntos donde g vale 0, y viendo la gráfica, solo vale 0 en 3, por lo que $Dom\left(\dfrac{f}{g}\right) =]-1,3[-\{2,\}$
2 pts.

b) $f(x)$ es un logaritmo, y es sabido que el recorrido del logaritmo son todos los reales, por lo que $Rec(f) = \mathbb{R}$ 2 pts.
Para $g(x)$, basta analizar el eje y de la gráfica, y nos damos cuenta que tenemos gráfica para todos los y mayores que 0, por lo que $Rec(g) = [0, \infty[$ 2 pts.

c) $(f \circ g)(0) = f(g(0)) = f(3) = \log_2(4) = 2$ 1 pto.
$(g \circ g)(0) = g(g(0)) = g(3) = 0$ 2 pts.
$(g \circ f)(-\frac{1}{2}) = g(f(-\frac{1}{2})) = g(\log_2(\frac{1}{2})) = g(-1) = 6$ 1 pto.

d) El 3 tiene 2 preimagenes, 0 y -3, ya que $g(0) = g(-3) = 3$ 2 pts.
El 0 tiene solo una preimagen, el 3, ya que $g(3) = 0$ 2 pts.

2) **[20 ptos.]**

a) Resolver la ecuación:

$$\log_{\frac{1}{2}}(x) + \log_{\frac{1}{2}}(x-1) = -1$$

b) Calcular el valor de la siguiente expresión:

$$\frac{\cos(\frac{7\pi}{3}) + \text{sen}(-\frac{\pi}{6})}{\tan(\frac{17\pi}{4}) - \sec(3\pi)} + \frac{\log_2(16)}{e^{\ln(4)}}$$

Desarrollo

a) Usando las propiedades del logaritmo nos queda:
$\log_{\frac{1}{2}}(x) + \log_{\frac{1}{2}}(x-1) = \log_{\frac{1}{2}}(x(x-1)) = -1$ (2 pts.)
Lo que implíca que $x^2 - x = 2$ (3 pts), y resolviendo esta ecuación cuadratica nos damos cuenta que las soluciones son $x = 2$ o bien $x = -1$. (3 pts.)
´Notar que de estas soluciones solo nos sirve $x = 2$, ya que si $x = -1$, $\log_{\frac{1}{2}}(x)$ no estaría definido. Por lo que la solución es $x = 2$.(2 pts.)

b)

Calculemos los valores de cada expresión: (1 pto. c/u)

- $\cos(\frac{7\pi}{3}) = \cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$
- $\text{sen}(-\frac{\pi}{6}) = -\text{sen}(\frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$
- $\tan(\frac{17\pi}{4}) = \tan(\frac{\pi}{4}) = 1$
- $\sec(3\pi) = \sec(\pi) = -1$
- $\log_2(16) = 4$
- $e^{\ln(4)} = 4$

Ahora evaluamos la expresión y nos queda

$$\frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{1 - (-1)} + \frac{4}{4} = 0 + 1 = 1$$

(4 pts.)

3) **[20 ptos.]**

a) Determine todas las soluciones de la siguiente ecuación trigonométrica, en el intervalo $[0, 4\pi[$.

$$\cos^2(x) + \text{sen}(x) + 1 = 0$$

b) Demostrar que

$$\frac{2\text{sen}x \cos x - \cos x}{1 - \text{sen}x + \text{sen}^2(x) - \cos^2 x} = \text{cotg}\, x$$

Desarrollo

a) Usando identidades nos queda

$$\cos^2(x) + \text{sen}(x) + 1 = 1 - \text{sen}^2(x) + \text{sen}(x) + 1 = -\text{sen}^2(x) + \text{sen}(x) + 2$$

(3 pts.)

Luego podemos realizar un cambio de varibles $\text{sen}(x) = \text{u}$, de donde nos quedaría la ecuación:

$$u^2 - u - 2 = (u-2)(u+1) = 0$$

Como el seno siempre está entre -1 y 1, solo nos queda la solución $\text{sen}(x) = -1$. (3 pts.) Finalmente todas las soluciónes en el intervalo solicitado de $\text{sen}(x) = -1$, son $x = \dfrac{3\pi}{2}$ o $x = \dfrac{7\pi}{2}$. (2 pts. cada solución)

b) Desarrollando obtenemos:

$$\frac{2\text{sen}x \cos x - \cos x}{1 - \text{sen}x + \text{sen}^2 x - \cos^2 x} = \frac{\cos x(2\text{sen}x - 1)}{1 - \text{sen}x + \text{sen}^2 x - \cos^2 x}$$

$$\frac{\cos x(2\text{sen}x - 1)}{\text{sen}^2 x + \cancel{\cos^2 x} - \text{sen}x + \text{sen}^2 x - \cancel{\cos^2 x}} = \frac{\cos x(2\text{sen}x - 1)}{2\text{sen}^2 x - \text{sen}x}$$

$$\frac{\cos x\cancel{(2\text{sen}x - 1)}}{\text{sen}x\cancel{(2\text{sen}x - 1)}} = \text{cotg}x$$

(5 o 10 pts. dependiendo avance)